

# REGIME THERMIQUE DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE A PROPRIETES PHYSIQUES CONSTANTES AVEC SOUFFLAGE\*

L. F. TSEN et C. QUEMARD

Centre d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques, Route de l'Aérodrome, 86—Poitiers, France

(Reçu le 12 Décembre 1967)

**Résumé**—L'équation de l'énergie moyenne d'une couche limite homogène turbulente incompressible avec transfert de masse a été numériquement intégrée et le coefficient de transfert de chaleur obtenu sous forme de nombre de Spalding, à l'aide des hypothèses de nombres de Prandtl laminaires et turbulents constants, d'un taux réduit de transfert de masse constant, d'une distribution de température à la paroi en fonction échelon, et d'une loi unifiée de vitesse de paroi.

On présente aussi quelques résultats de mesure de profils de vitesse et de température en comparaison avec les résultats théoriques.

## NOTATIONS

$x, y,$	système de coordonnées de la couche limite ;	$q,$	$= \int_0^y u \, dy$ , fonction de courant ;
$x_0,$	origine de la couche limite thermique ;	$\theta,$	$= (T_e - T)/(T_e - T_p);$
$u, v,$	composantes suivant $x, y$ de la vitesse moyenne ;	$u_v,$	$= \sqrt{(\tau_p/\rho)}$ , vitesse de frottement ;
$u_e,$	vitesse extérieure ;	$x^+,$	$= \int_{x_0}^x u_e/v \, dx;$
$v_p,$	vitesse normale d'injection ;	$y^+,$	$= y u_e/v;$
$T,$	température ;	$u^+,$	$= u/u_e;$
$T_p, T_e,$	température à la paroi et à l'extérieur ;	$v_p^+,$	$= v_p/u_e;$
$\rho,$	masse volumique ;	$\varepsilon^+,$	$= (\mu + \varepsilon)/\mu;$
$\mu, \varepsilon,$	viscosités laminaire et turbulente ;	$q^+,$	$= q/v;$
$\lambda, \kappa,$	conductibilités thermiques laminaire et turbulente ;	$z, \zeta,$	cf. équations (8) et (9) ;
$\nu,$	$= \mu/\rho;$	$C_f,$	coefficient de frottement ;
$C_p,$	chaleur spécifique à pression constante ;	$St,$	nombre de Stanton ;
$K,$	$= 0,4$ , constante de von Kármán ;	$Sp,$	$= Pr St / \sqrt{(C_f/2)}$ , nombre de Spalding ;
$\tau_p,$	tension de frottement pariétal ;	$Pr,$	$= \mu C_p / \lambda$ , nombre de Prandtl ;
		$Pr_t,$	$= \varepsilon C_p / \kappa$ , nombre de Prandtl turbulent ;
		$Pr_m,$	$= (\mu + \varepsilon) C_p / (\lambda + \varepsilon)$ , nombre de Prandtl mixte ;
		$Re_x,$	$= u_e x / v$ , nombre de Reynolds.

\* Travail subventionné par la D.R.M.E. contrat n° 40465.

### 1. INTRODUCTION

PARMI les méthodes utilisables pour refroidir les surfaces soumises à l'échauffement par convection, le transfert de masse, dont il est question dans cette étude, consiste à injecter de la paroi dans la couche limite un fluide de température inférieure à la température de frottement [1]. L'effet d'une telle injection est double. Premièrement, une partie du flux de chaleur incident est absorbée par la masse calorifique du fluide injecté et éventuellement par la chaleur latente de son changement d'état. Deuxièmement, l'injection modifie les propriétés de la couche limite non seulement par la nature du fluide injecté qui peut être différente de celle de l'écoulement général, mais encore, même dans le cas d'une couche limite homogène, par la présence d'une vitesse normale à la paroi. Cette vitesse qui, tout en restant faible, peut atteindre des valeurs comparables à celles de la composante normale de la vitesse dans la couche limite en absence de l'injection, introduit une perturbation importante dans la couche limite et réduit ainsi le coefficient de transfert de chaleur: c'est l'effet d'écran que seul nous considérerons.

L'influence de l'injection dans une couche limite laminaire est assez bien connue car le système d'équation peut être intégré au moins numériquement et le calcul mené à terme dans bien des cas (par exemple [2-4]). Ces résultats ont montré une diminution notable des coefficients de frottement et de transfert de chaleur et un épaissement de la couche limite.

De même que dans le cas sans injection on ne dispose que d'une approche semi-empirique pour l'étude de la couche limite turbulente avec injection. Le régime dynamique a principalement été étudié dans le cas d'une plaque plane [5] à [11] et le régime thermique en est souvent déduit par l'analogie de Reynolds [5], c'est à dire en supposant essentiellement que le nombre de Prandtl laminaire est égal à l'unité et que l'hypothèse d'un nombre de Prandtl turbulent unité reste valable en présence de l'injection.

En effet, en fluide incompressible à propriétés physiques constantes, l'équation de l'énergie moyenne s'écrit en négligeant la dissipation [12, 13]

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu + \varepsilon}{\rho Pr_m} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (1)$$

où le nombre de Prandtl mixte est par définition

$$Pr_m = \frac{(\mu + \varepsilon)C_p}{\lambda + \kappa} = \frac{\varepsilon^+}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} (\varepsilon^+ - 1)} \quad (2)$$

avec les conditions aux limites

$$y = 0, \quad T = T_p(x), \quad y \rightarrow \infty,$$

$$T \rightarrow T_c = \text{Cte.}$$

La comparaison de cette équation avec l'équation dynamique pour la plaque plane et les conditions aux limites respectives montrent que si  $Pr = Pr_t = 1$ , si la paroi est isotherme et si la couche limite thermique a la même origine que la couche limite dynamique (régime thermique établi), alors les profils de vitesse  $u/u_e$  et de température  $(T - T_p)/(T_c - T_p)$  sont identiques quelle que soit la distribution de la vitesse d'injection  $v_p(x)$ . On a notamment

$$St = C_f/2. \quad (3)$$

L'influence des nombres de Prandtl  $Pr$ ,  $Pr_t$  différents de l'unité dans une couche limite turbulente avec transfert de masse ne semble avoir été étudiée que sous l'hypothèse élémentaire d'écoulement parallèle [6].

Par ailleurs, il est intéressant d'étudier le régime thermique transitoire, c'est à dire le retard de l'établissement de la couche limite thermique par rapport à la couche limite dynamique, ce retard pouvant par exemple être occasionné par celui de l'injection lorsque le transfert de chaleur est directement lié à l'injection de gaz froid dans la couche limite. Enfin, comme il est généralement admis que le nombre de Prandtl turbulent ne dépend que du régime dynamique, l'équation de l'énergie (1) est linéaire en  $T$  et on peut se limiter à l'étude du cas élémentaire d'une distribution de tem-

pérature à la paroi  $T_p(x)$  en fonction échelon à  $x = x_0$ . Le cas d'une distribution de  $T_p(x)$  quelconque peut s'obtenir alors par superposition de ces solutions élémentaires.

Nous allons étudier ce problème élémentaire pour  $Pr$  et  $Pr_t$  égaux ou différents de l'unité. Pour cela nous utilisons une méthode développée à l'origine par Lighthill [14] pour linéariser les équations de la couche limite laminaire. Cette méthode a été reprise par Spalding [15] Kestin et alii [16, 17] pour la couche limite turbulent sans transfert de masse. Le principe consiste à intégrer l'équation (1) en  $y$  remplaçant les variables dynamiques  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  par leurs expressions valables seulement près de la paroi. Comme l'équation (1) est la même avec ou sans gradient de pression, si l'on peut supposer que ces expressions sont insensibles au gradient de pression, les résultats seront aussi valables pour un gradient de pression non nul. Les équations du problème étant les mêmes, nous avons aussi inclus les cas d'aspiration  $v_p < 0$  et de chauffage  $T_p > T_e$ .

## 2. EQUATION TRANSFORMÉE DE L'ÉNERGIE

Soit une couche limite turbulente incompressible soumise à un transfert de masse  $v_p(x)$  et dont la température à la paroi est égale à la température de l'écoulement général  $T_e$  jusqu'à l'abscisse  $x = x_0$  et égale à la température  $T_p = \text{constante}$  à partir de  $x_0$ .  $x_0$  définit l'abscisse de l'origine de la couche limite thermique qui peut être la même que celle de la couche limite dynamique (régime établi) ou située en aval de cette dernière (régime transitoire).

L'équation (1) et les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu + \varepsilon}{\rho Pr_m} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x = x_0, \quad \theta = 0; \quad y = 0, \quad x > x_0, \\ \theta = 1; \quad y \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Définissons la fonction de courant comme le

débit entre la paroi et l'ordonnée  $y$ :

$$q = \int_0^y u dy.$$

En présence du transfert de masse, une ligne de courant n'est plus caractérisée par  $q = \text{constante}$ , mais cette définition de  $q$  permet d'écrire la loi de vitesse près de la paroi d'une manière plus simple. Avec les variables  $x$  et  $q$  de Von Mises, l'équation (4) se transforme à l'aide de l'équation de continuité en :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\mu + \varepsilon}{\rho Pr_m} u \frac{\partial \theta}{\partial q} \right) - v_p \frac{\partial \theta}{\partial q}. \quad (6)$$

Comme la plus grande partie de la variation de température a lieu dans la zone près de la paroi, on peut, suivant [14, 15], remplacer d'une manière approximative dans cette équation,  $\varepsilon$  et  $u$  par leurs valeurs déduites de la loi universelle de vitesse près de la paroi. Pour cela, il est commode d'utiliser à la place de  $x$  et  $q$ , les variables réduites  $x^+$  et  $u^+$  comme variables indépendantes. L'équation (6) devient alors :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x^+} \right)_{u^+} &= \left( \frac{\partial u^+}{\partial q^+} \right)_{x^+} \left( \frac{\partial}{\partial u^+} \right)_{x^+} \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon^+ u^+}{Pr_m} \left( \frac{\partial u^+}{\partial q^+} \right)_{x^+} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u^+} \right)_{x^+} - v_p^+ \theta \right] \\ &- \left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right)_{q^+} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u^+} \right)_{x^+}. \end{aligned} \quad (7)$$

Près de la paroi,  $u^+$  et  $\varepsilon^+$  sont des fonctions universelles de  $q^+$  et  $v_p^+$ , et on a (voir appendice 1)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right)_{q^+} &= \left( \frac{\partial u^+}{\partial v_p^+} \right)_{q^+} \frac{dv_p^+}{dx^+}, \\ \left( \frac{\partial u^+}{\partial q^+} \right)_{x^+} &= \frac{1 + v_p^+ u^+}{\varepsilon^+ u^+}. \end{aligned}$$

En reportant dans (7) ces relations valables seulement près de la paroi et en faisant pour simplifier les changements de variable successifs

$$z = \frac{1}{v_p^+} \log (1 + v_p^+ u^+), \quad (8)$$

$$\xi = \int_0^x Pr_m dz, \quad (9)$$

$z$  étant identique à  $u^+$  en absence du transfert de masse ( $v_p^+ = 0$ ), l'équation (7) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x^+} &= \frac{Pr_m}{\varepsilon^+ u^+} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_p^+ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial u^+}{\partial v_p^+} \right)_q \frac{dv_p^+}{dx^+} \frac{Pr_m}{1 + v_p^+ u^+} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Les conditions aux limites (5) deviennent :

$$\begin{aligned} x^+ = 0, \quad \theta &= 0; \quad \xi = 0, \quad x^+ > 0, \\ \theta &= 1; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Nous supposons pour simplifier  $v_p^+$  constant, ce qui signifie en toute rigueur que la vitesse d'injection est proportionnelle à la vitesse de frottement. Cette hypothèse est approximativement vérifiée pour une vitesse d'injection constante quand dans la zone étudiée, le coefficient de frottement est sensiblement constant. On peut alors négliger le dernier terme dans l'équation (10) qui devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{Pr_m}{\varepsilon^+ u^+} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_p^+ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right). \quad (12)$$

Le transfert de chaleur à la paroi est caractérisé par le nombre de Spalding défini par :

$$\begin{aligned} Sp &= Pr St \left( \frac{2}{C_f} \right)^{\frac{1}{2}} = - \left( \frac{\partial \theta}{\partial u^+} \right)_p \\ &= - Pr \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)_p \end{aligned} \quad (13)$$

On a tenu compte de la relation  $Pr_m = Pr$  à la paroi dans la dernière égalité.

Nous allons intégrer numériquement l'équation (12) avec les conditions (11) moyennant les hypothèses de  $Pr$  et  $Pr_t$  constants et d'un coefficient de viscosité mixte réduit  $\varepsilon^+$  déduit d'une loi universelle de vitesse qui raccorde d'une manière lisse la loi de vitesse dans la sous-couche laminaire à la loi de vitesse dans la région de turbulence de paroi proposée par

Stevenson [9] (voir appendice 1) :

$$\varepsilon^+ = 1 + 0,0443 (1 + v_p^+ u^+)^{\frac{1}{2}} \times \left( e^u - 1 - \frac{U^2}{2!} - \frac{U^3}{3!} \right) \quad (14)$$

avec

$$U = \frac{2K}{v_p^+} [(1 + v_p^+ u^+)^{\frac{1}{2}} - 1].$$

Dans l'équation (12),  $Pr_m$  est fonction de  $\varepsilon^+$  par sa définition (2),  $\varepsilon^+$  est fonction de  $u^+$  d'après (14) et  $u^+$  est finalement exprimable en fonction de  $\xi$  d'après (8) et (9),  $v_p^+$  étant le paramètre du taux d'injection. Remarquons que si pour l'injection nulle  $v_p^+ = 0$ , l'équation (10) ne dépend finalement des nombres de Prandtl que par le rapport  $Pr/Pr_t$  [18], il n'en est plus de même en présence de l'injection.

### 3. MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

En posant

$$f(\xi) = \frac{\varepsilon^+ u^+}{Pr_m}$$

l'équation (12) s'écrit sous forme de différences finies :

$$\begin{aligned} \theta(x^+ + \Delta x^+, \xi) &= \theta(x^+, \xi) \\ &+ \phi \left[ \left( 1 + \frac{v_p^+}{2} \Delta \xi \right) \theta(x^+, \xi - \Delta \xi) \right. \\ &+ \left( 1 - \frac{v_p^+}{2} \Delta \xi \right) \theta(x^+, \xi + \Delta \xi) \\ &\quad \left. - 2\theta(x^+, \xi) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

avec

$$\phi = \frac{\Delta x^+}{(\Delta \xi)^2 f(\xi)}.$$

Cette équation permet de calculer le profil  $\theta$  à l'abscisse  $x^+ + \Delta x^+$  à partie du profil à l'abscisse  $x^+$ . Toutefois, d'après Kestin et Persen [16] citant Schmidt, qui ont intégré l'équation (15) pour  $v_p^+ = 0$ , la stabilité du calcul implique  $\phi < 0,5$ , de sorte que l'équation

(15) est inutilisable à la paroi puisque quand  $\xi \rightarrow 0$ , on a  $f(\xi) \rightarrow 0$  et  $\phi \rightarrow \infty$ . Pour calculer  $\theta$  au premier pas de la paroi ( $\xi = \Delta\xi$ ), nous utiliserons l'équation (12) à la paroi :

$$0 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_p^+ \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$

qui s'écrit sous forme de différences finies :

$$\begin{aligned} \theta(x^+, \Delta\xi) = \frac{1}{2} & \left[ \left( 1 + \frac{v_p^+ \Delta\xi}{2} \right) \right. \\ & \left. + \left( 1 - \frac{v_p^+ \Delta\xi}{2} \right) \theta(x^+, 2\Delta\xi) \right]. \end{aligned}$$

Le nombre de Spalding est alors d'après la définition (13)

$$Sp(x^+) = \frac{1 - \theta(x^+, \Delta\xi)}{\Delta\xi} Pr.$$

L'inversion de l'intégrale (9), nécessaire pour le calcul de  $f(\xi)$  a été effectuée par itération en utilisant la seconde formule de Simpson pour l'intégration numérique.

Les pas  $\Delta x^+$  et  $\Delta\xi$  doivent être choisis tels que  $\phi < 0,5$ . Des essais préliminaires ont montré que l'on peut se contenter des pas relativement larges afin d'économiser le temps de calcul. Le tableau de pas ci-dessous a finalement été utilisé :

$x^+$	$\Delta\xi$	$\Delta x^+$	$\phi$ maximal ( $Pr = 1$ , $Pr_t = 1$ )
$1-10$	0,4	0,03	0,23
$10-10^2$	0,4	0,04	0,32
$10^2-10^3$	0,8	0,4	0,40
$10^3-10^4$	1,6	3	0,36

Il est possible de commencer formellement l'intégration numérique de l'équation (15) à partir de  $x^+ = 0$  en utilisant la condition initiale (11). Mais au voisinage de  $x^+ = 0$ , la condition de stabilité  $\phi < 0,5$  imposerait des pas très fins qui allongeraient le temps de calcul. Il est donc plus indiqué d'utiliser comme

condition initiale une solution analytique en laminaire pour  $x^+$  suffisamment petit. En effet, puisqu'au départ, la couche limite thermique est entièrement contenue dans la sous couche laminaire, on a  $\varepsilon^+ = 1$ ,  $u^+ = z$ ,  $Pr_m = Pr$  et l'équation (12) prendra sa forme laminaire

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{Pr^2}{\xi} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_p^+ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right). \quad (16)$$

Dans le cas sans transfert de masse  $v_p^+ = 0$ , Lighthill [14] a montré qu'en posant

$$\eta = \frac{\xi^3}{9x^+ Pr^2},$$

cette équation devient :

$$\eta \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + (\eta + \frac{2}{3}) \frac{d\theta}{d\eta} = 0$$

dont la solution vérifiant les conditions (11) est :

$$\theta_0(\eta) = 1 - \frac{\gamma(\frac{1}{3}, \eta)}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

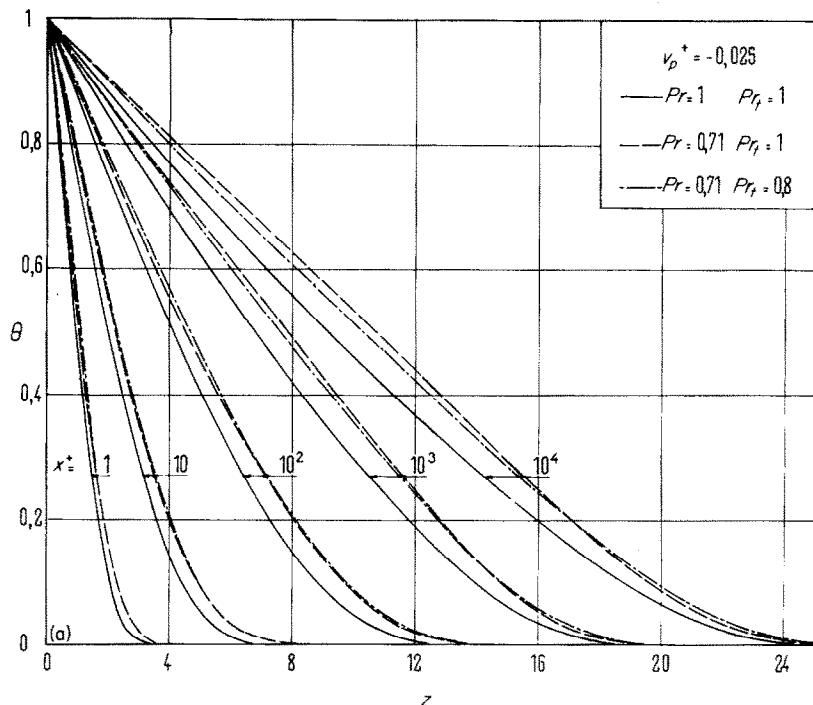
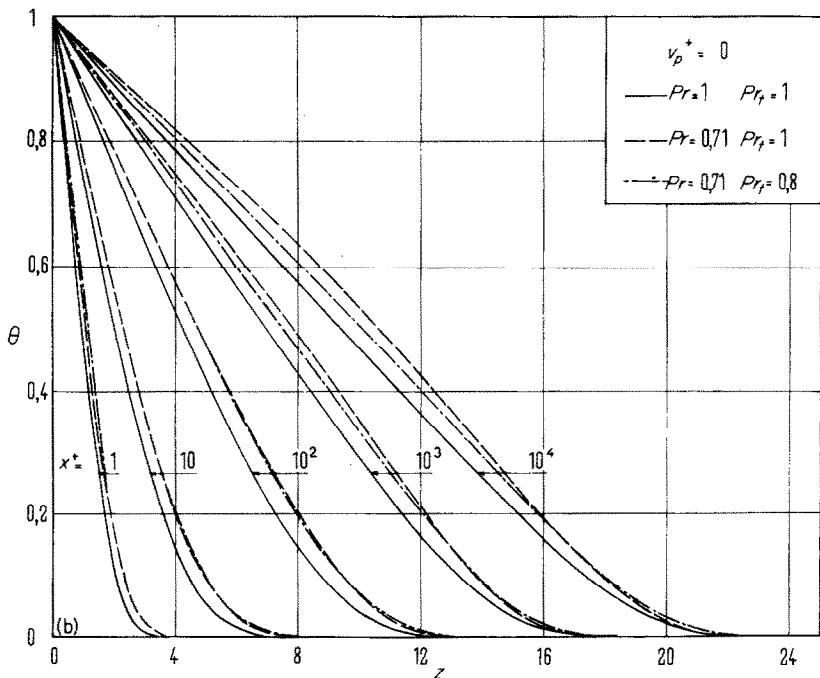
$\gamma$  et  $\Gamma$  désignent les fonctions euleriennes incomplète et complète. En présence du transfert de masse, on vérifie que pour  $v_p^+$  petit, l'équation (16) admet la solution au second ordre en  $v_p^+$  près (voir appendice 2) :

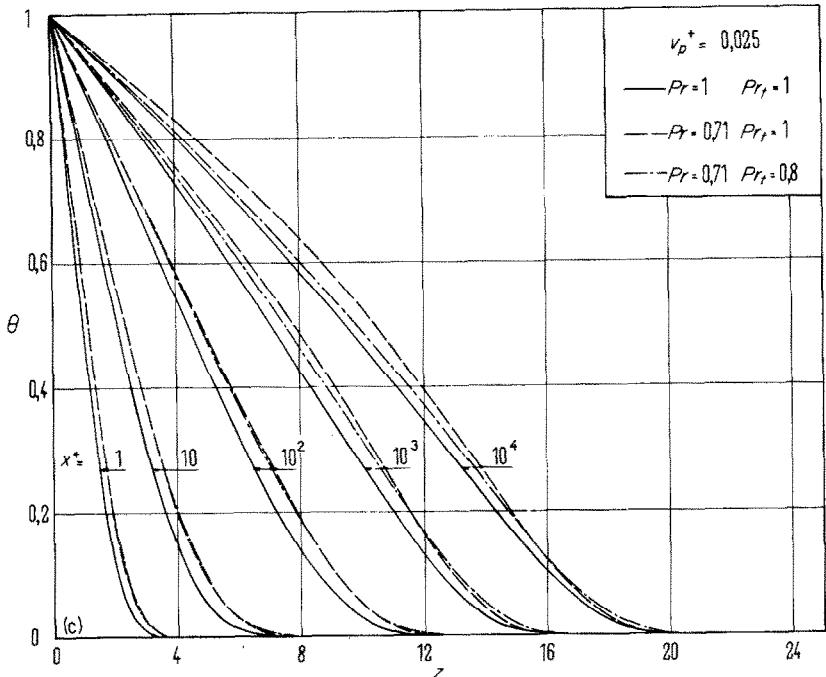
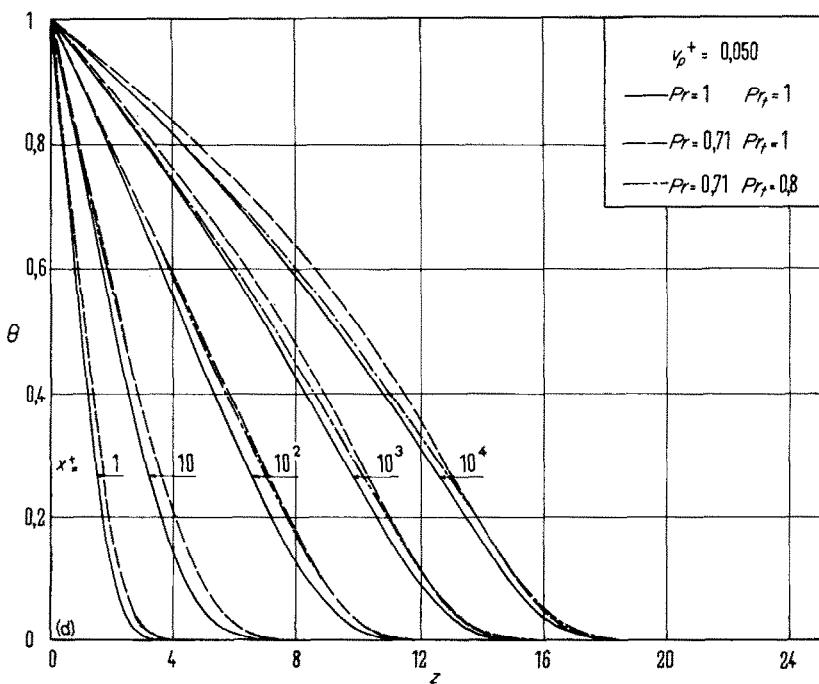
$$\theta(x^+, \xi) = \left( 1 + v_p^+ \frac{\xi}{2} \right) \theta_0(\eta).$$

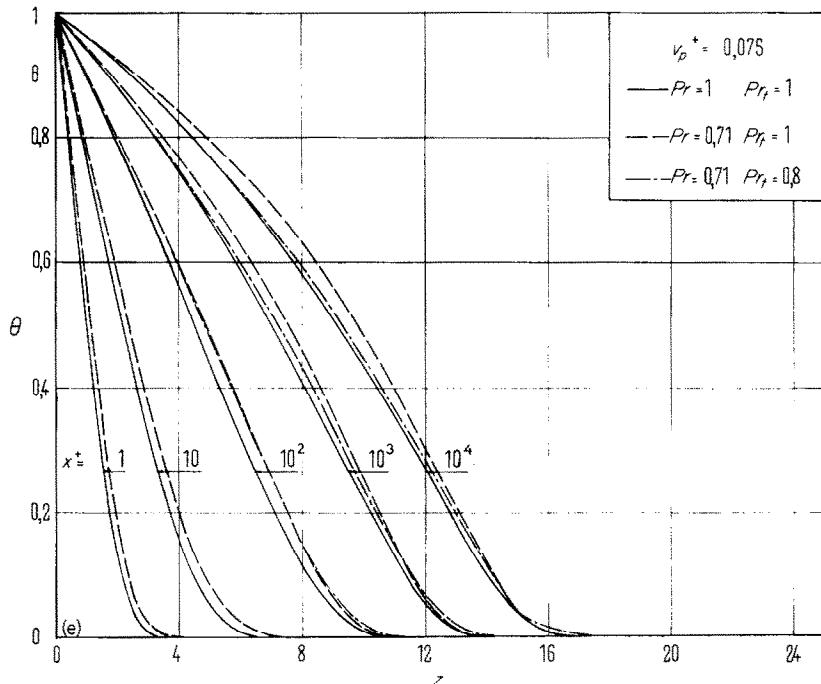
Nous avons utilisé cette solution analytique pour commencer le calcul numérique en  $x^+ = 1$ .

#### 4. RESULTATS NUMERIQUES

L'ensemble du calcul a été effectué sur ordinateur IBM 1620 pour les taux réduits d'injection  $v_p^+ = -0,025, 0, 0,025, 0,050$  et  $0,075$  et des  $x^+$  variant de  $1$  à  $10^4$ . Nous avons limité le calcul à  $x^+ = 10^4$  pour une question de temps, en effet un calcul pour un seul taux  $v_p^+$  dure 3 h 30 min environ. Le cas sans transfert de masse a été inclus en vue de comparer avec les résultats de [16, 17]. Trois séries de

FIG. 1(a). Profil de température  $\theta(z)$ :  $v_p^+ = -0,025$ .FIG. 1(b). Profil de température  $\theta(z)$ :  $v_p^+ = 0$ .

FIG. 1(c). Profil de température  $\theta(z)$ :  $v_p^+ = 0,025$ .FIG. 1(d). Profile de température  $\theta(z)$ :  $v_p^+ = 0,050$ .

FIG. 1(e). Profil de température  $\theta(z)$ :  $v_p^+ = 0,075$ .

calcul ont été effectuées pour les nombres de Prandtl.

$Pr$	$Pr_t$
1	1
0,71	1
0,71	0,80

On a représenté Fig. 1 quelques uns des profils de température  $\theta$  en fonction de  $z$  montrant l'influence du transfert de masse et

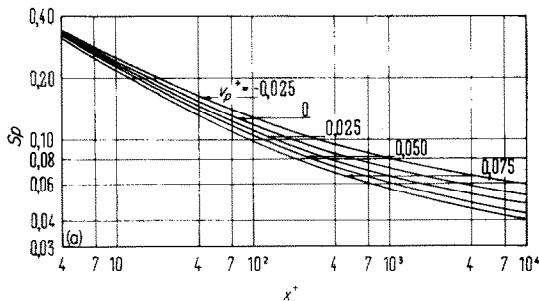
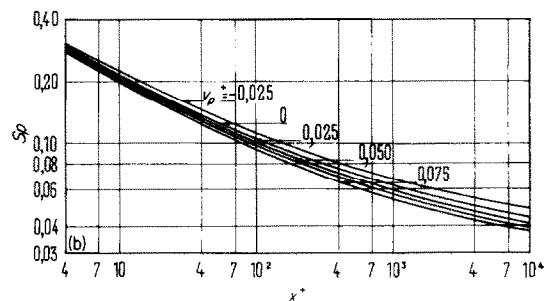
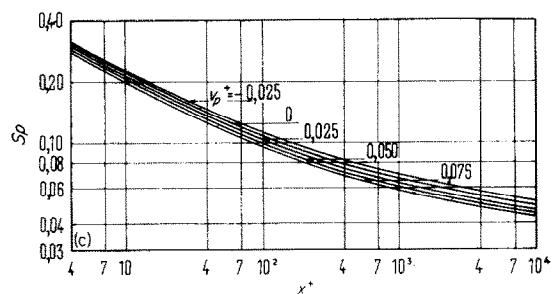
FIG. 2(a). Nombre de Spalding  $Sp[x^+]$ :  $Pr = 1, Pr_t = 1$ .FIG. 2(b). Nombre de Spalding  $Sp[x^+]$ :  $Pr = 0,71, Pr_t = 1$ .FIG. 2(c). Nombre de Spalding  $Sp[x^+]$ :  $Pr = 0,71, Pr_t = 0,8$ .

Tableau 1. Nombre de Spalding

(a)  $Pr = 1, \quad Pr_t = 1$ 

$x^+$	$v_p^+$	0	0 [17]	-0,025	0,025	0,050	0,075
4	0,3369			0,34584	0,32817	0,31964	0,31133
7	0,28048			0,28945	0,27178	0,26335	0,25518
10	0,24948		0,2498	0,25952	0,24075	0,23235	0,22425
40	0,15889	0,1589		0,16818	0,15018	0,14204	0,13443
70	0,13346	0,1335		0,14274	0,12493	0,11711	0,10994
100	0,12006	0,1200		0,12928	0,11172	0,10419	0,09738
400	0,08716	0,08466		0,09521	0,08021	0,07418	0,06893
700	0,07706	0,07598		0,08476	0,07057	0,06505	0,06032
1000	0,07215	0,07151		0,07970	0,06587	0,06058	0,05608
4000	0,06033	0,05883		0,06698	0,05493	0,05043	0,04664
7000	0,05572	0,05504		0,06237	0,05044	0,04613	0,04253
10000	0,05330	0,05288		0,05998	0,04806	0,04382	0,04033

(b)  $Pr = 0,71, \quad Pr_t = 1$ 

$x^+$	$v_p^+$	0	0 [17]	-0,025	0,025	0,050	0,075
4	0,2989			0,30433	0,29325	0,28828	0,28315
7	0,2494			0,25485	0,24410	0,23896	0,23396
10	0,2221	0,2228		0,22754	0,21675	0,21162	0,20667
40	0,1418	0,1418		0,14737	0,13647	0,13152	0,12689
70	0,1191	0,1191		0,12467	0,11400	0,10929	0,10496
100	0,1071	0,1072		0,11675	0,10218	0,09768	0,09359
400	0,7608	0,07503		0,08074	0,07210	0,06863	0,06560
700	0,6814	0,06680		0,07162	0,06364	0,06053	0,05783
1000	0,6303	0,06248		0,06697	0,05927	0,05630	0,05376
4000	0,5089	0,05007		0,05458	0,04786	0,04533	0,04321
7000	0,4676	0,04638		0,05038	0,04388	0,04152	0,03960
10000	0,4452	0,04428		0,04815	0,04168	0,03939	0,03750

(c)  $Pr = 0,71, \quad Pr_t = 0,80$ 

$x^+$	$v_p^+$	0	-0,025	0,025	0,05	0,075
4	0,29890	0,30436	0,29356	0,28832	0,28319	
7	0,24947	0,25491	0,24418	0,23905	0,23406	
10	0,22216	0,22763	0,21687	0,21176	0,20682	
40	0,14222	0,14777	0,13703	0,13217	0,12764	
70	0,11993	0,12534	0,11496	0,11042	0,10626	
100	0,10824	0,11350	0,10349	0,0992	0,09533	
400	0,07850	0,08271	0,07489	0,07177	0,06906	
700	0,07030	0,07415	0,06706	0,06431	0,06194	
1000	0,06608	0,06978	0,06301	0,06041	0,05819	
4000	0,05469	0,05785	0,05201	0,04995	0,04846	
7000	0,05082	0,05386	0,04840	0,04648	0,04488	
10000	0,04868	0,05169	0,04632	0,04443	0,04288	

des nombres de Prandtl. Nous renvoyons à [19] pour d'autres résultats numériques plus détaillés sur ces profils. Dans ces figures, nous avons préféré utiliser la variable  $z$  au lieu de  $\xi$  pour faciliter l'interprétation des résultats expérimentaux puisqu'à l'inverse de  $\xi$ ,  $z$  est une quantité plus facilement mesurable.

Le nombre de Spalding calculé est représenté tableau 1 et Fig. 2. Pour  $v_p^+ = 0$ , on y a inclus pour comparaison les valeurs obtenues par Gardner et Kestin [17] montrant ainsi que malgré des pas assez larges par rapport à ceux employés dans [17], la précision du calcul reste acceptable.

Dans le cas  $Pr = Pr_t = 1$ , à cause de l'analogie de Reynolds, les équations (4) ou (6), (10) et (12) avec  $\theta$  remplacé par  $1 - u/u_e$  représentent aussi les équations dynamiques sans gradient de pression avec respectivement les mêmes degrés d'approximation, de sorte que les résultats numériques dans ce cas peuvent être utilisés pour ce problème dynamique;  $x_0$  représente alors le bord d'attaque de la plaque plane que l'on peut prendre comme l'origine des  $x$  ( $x_0 = 0$ ). On a alors d'après (3)

$$Sp = \sqrt{\left(\frac{C_f}{2}\right)}$$

et

$$x^+ = \int_0^{Re_x} \left[ \sqrt{\left(\frac{C_f}{2}\right)} \right] d Re_x$$

Donc les courbes de la Fig. 2(a) représentent aussi l'expression implicite d'une loi de frottement de la couche limite sur plaque plane avec transfert de masse.

### 5. COMPARAISON EXPÉRIMENTALE

Des mesures de profil de vitesse et de température ont été effectuées dans une soufflerie dont le plancher comporte une partie poreuse à travers laquelle on injecte de l'air chauffé. De ces profils, on a pu déduire le coefficient de frottement  $C_f$  donc la vitesse de frottement

$u_r$  par l'équation dynamique intégrale. Les conditions d'essais et les résultats de mesures sont indiqués en détail dans [19]. Les Fig. 3 représentent les profils de température et de

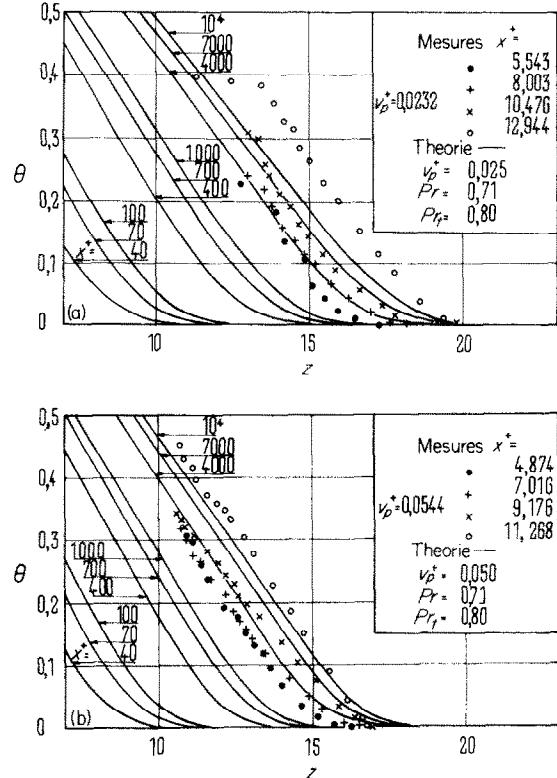


FIG. 3. Profils de température expérimental et théorique  $\theta(z)$ .

vitesse mesurés interprétés en  $\theta(z)$  en comparaison avec les courbes théoriques pour  $Pr = 0,71$  et  $Pr_t = 0,8$  aux taux d'injection  $v_p^+$  voisins. L'accord peut être considéré comme encourageant si l'on tient compte de la marge d'imprécision généralement attribuée à la détermination du coefficient de frottement par l'équation intégrale en présence du transfert de masse.

### 6. CONCLUSION

L'équation de l'énergie moyenne d'une couche limite turbulente incompressible avec transfert de masse a pu être intégrée et le coefficient de transfert de chaleur obtenu sous forme de

nombre de Spalding sous les hypothèses  $Pr$  constant,  $Pr_t$  constant,  $v_p^+$  constant,  $T_p$  en fonction échelon et une loi universelle de vitesse raccordant d'une manière lisse la loi de sous couche laminaire à la loi de turbulence de paroi de Stevenson. On a enregistré un certain accord avec les expériences, ce qui suggère que l'hypothèse si souvent utilisée faute de mieux, dans le cas sans transfert de masse, d'un nombre de Prandtl turbulent constant voisin de 0,8 pourrait être appliquée aussi en présence de transfert de masse. Bien sûr, la question de savoir avec plus de précision comment le transfert de masse peut affecter le profil du nombre de Prandtl turbulent dans une couche limite reste posée.

Comme dans le cas  $Pr = Pr_t = 1$ , les équations dynamique et de l'énergie d'une couche limite sans gradient de pression sont identiques, les résultats numériques obtenus dans ce cas peuvent être utilisés aussi à la détermination du coefficient de frottement sur une plaque plane en présence de transfert de masse.

#### REFERENCES

- E. R. G. ECKERT and R. DRAKE, JR., *Heat and Mass Transfer*, p. 301. McGraw-Hill, New York (1959).
- G. M. LOW, The compressible laminar boundary layer with fluid injection, NACA TN 3404 (1955).
- J. N. B. LIVINGOOD and P. L. DONOUGHE, Summary of laminar boundary layer solutions for wedge-type flow over convection and transpiration cooled surfaces, NACA TN 3588 (1955).
- E. RESHOTKO and C. B. COHEN, Heat transfer at the forward stagnation point of blunt body, NACA TN 3513 (1955).
- W. H. DORRANCE and E. J. DORE, The effect of mass transfer on the compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer, *J. Aeronaut. Sci.* **21**, 404 (1954).
- M. W. RUBESIN, An analytical estimation of the effect of transpiring cooling on the heat transfer and skin friction characteristics of a compressible turbulent boundary layer, NACA TN 3341 (1954).
- J. H. CLARKE, H. R. MENKES and P. A. LIBBY, A provisional analysis of turbulent boundary layer injection, *J. Aeronaut. Sci.* **22**, 255 (1955).
- H. S. MICKLEY and R. S. DAVIS, Momentum transfer for flow over a flat plate with blowing, NACA TN 4017 (1957).
- T. N. STEVENSON, A law of the wall for turbulent boundary layer with suction or injection, College of Aeronautics, Cranfield, R.A. No. 166 (July 1963).
- L. F. TSEN, Loi de vitesse déficitaire de la couche limite turbulente avec injection ou aspiration pariétale, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **262**, Série A, 247 (Janvier 1966).
- R. GOETHALS, L. F. TSEN and C. QUEMARD, Mesure des vitesses dans la région extérieure d'une couche limite turbulente avec transfert de masse, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **262**, Série A, 1019-1022 (Mai 1966).
- R. MICHEL, Couches limites turbulentes et calcul pratique des couches limites en fluide incompressible, O.N.E.R.A. TP No. 25 (1963).
- J. KESTIN and P. D. RICHARDSON, Heat transfer across turbulent incompressible boundary layers, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 147 (1963).
- M. J. LIGHTHILL, Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer, *Proc. R. Soc. A* **202**, 359 (1950).
- D. B. SPALDING, Heat transfer to a turbulent stream from a surface with a step wise discontinuity in wall temperature, *International Developments in Heat Transfer*, Part II, p. 439. Am. Soc. Mech. Engrs, New York (1961).
- J. KESTIN and L. N. PERSEN, Application of Schmidt's method to the calculation of Spalding's function and of the skin-friction coefficient in turbulent flow, *Int. J. Heat Mass Transfer* **5**, 143 (1962).
- G. D. GARDNER and J. KESTIN, Calculation of the Spalding function over a range of Prandtl numbers, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6**, 289 (1963).
- D. B. SPALDING, Contribution to the theory of heat transfer across a turbulent boundary layer, *Int. J. Heat Mass Transfer* **7**, 743 (1964).
- C. QUEMARD, Contribution à l'étude des couches limites turbulentes incompressibles en présence de transfert de masse, Thèse Université de Poitiers (Juin 1967).
- D. B. SPALDING, A single formula for the law of the wall, *J. Appl. Mech.* **9**, 455 (1961).

#### APPENDICE 1

##### *Loi Unifiée de Vitesse Prés de la Paroi*

Au voisinage de la paroi, l'hypothèse usuelle des forces d'inertie négligeables ou encore d'écoulement parallèle conduit à l'équation dynamique

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} = (\mu + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} = \rho v_p u + \tau_p.$$

En prenant comme vitesse, longueur et masse volumique de référence  $u_r = \sqrt{(\tau_p/\rho)}$ ,  $v/u_r$  et  $\rho$ , cette équation devient sans dimension :

$$\varepsilon^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1 + v_p^+ u^+ \quad (A.1)$$

et admet donc une solution universelle de la forme

$$u^+ = u^+(y^+, v_p^+) \quad \text{ou} \quad u^+ = u^+(q^+, v_p^+) \quad (\text{A.2})$$

puisque

$$q^+ = \int_0^{y^+} u^+ dy^+ = q^+(y^+, v_p^+).$$

On a donc

$$\left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right)_{q^+} = \left( \frac{\partial u^+}{\partial v_p^+} \right)_{q^+} \frac{dv_p^+}{dx^+}$$

et d'après (A.1)

$$\left( \frac{\partial u^+}{\partial q^+} \right)_{x^+} = \frac{1}{u^+} \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1 + v_p^+ u^+}{\varepsilon^+ u^+},$$

relations utilisées dans § 2. Notons que si la loi universelle (A.2) est considérée comme purement expérimentale, l'équation (A.1) doit être considérée comme une hypothèse sur la tension tangentielle.

Dans la sous couche laminaire, on a  $\varepsilon^+ = 1$ ; l'équation (A.1) s'intègre en

$$y^+ = \frac{1}{v_p^+} \log(1 + v_p^+ u^+).$$

Dans la région de turbulence de paroi, Stevenson [9] propose une loi de vitesse basée sur la longueur de mélange et sur les mesures pour la détermination des constantes :

$$y^+ = e^{-Kd} e^{2K/v_p^+} [(1 + v_p^+ u^+)^{\frac{1}{2}} - 1]$$

où  $K = 0,4$  et  $d = 5,5$ . Le raccordement lisse de ces deux lois pourrait être obtenu suivant le procédé proposé par Spalding [20]. On obtient :

$$y^+ = \frac{1}{v_p^+} \log(1 + v_p^+ u^+) + e^{-Kd} \left( e^U - 1 - U - \frac{U^2}{2!} + \dots \right)$$

avec

$$U = \frac{2K}{v_p^+} [(1 + v_p^+ u^+)^{\frac{1}{2}} - 1].$$

Le coefficient réduit de viscosité mixte est alors d'après (A.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon^+ &= 1 + K e^{-Kd} (1 + v_p^+ u^+)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left( e^U - 1 - U - \frac{U^2}{2!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Or d'après [20], dans le cas sans injection  $\varepsilon^+$  varie avec  $y^+$  selon une puissance au moins égale à 3. Nous supposons que ceci reste valable en présence de l'injection. On aboutit alors à la relation (14) utilisée dans § 2.

## APPENDICE 2

### Profil de Température Initial

Nous cherchons une solution analytique de l'équation (16) du § 3

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^+} = \frac{Pr^2}{\xi} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - v_p^+ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right).$$

En faisant le changement de variables de  $x^+$ ,  $\xi$  en  $x^+$  et  $\eta = (\xi^3/9Pr^2x^+)$ , l'équation devient :

$$\begin{aligned} \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + (\frac{2}{3} + \eta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{v_p^+}{3} (9Pr^2x^+\eta)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ = x^+ \frac{\partial \theta}{\partial x^+}. \end{aligned}$$

Cherchons une solution en série de la forme :

$$\theta = \theta_0(\eta) + \frac{v_p^+}{3} (9Pr^2x^+)^{\frac{1}{2}} \theta_1(\eta) + \dots$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient les deux premières équations

$$\eta \frac{d^2 \theta_0}{d\eta^2} + (\frac{2}{3} + \eta) \frac{d\theta_0}{d\eta} = 0,$$

$$\eta \frac{d^2 \theta_1}{d\eta^2} + (\frac{2}{3} + \eta) \frac{d\theta_1}{d\eta} - \frac{1}{3} \theta_1 = \eta^{\frac{1}{2}} \frac{d\theta_0}{d\eta}.$$

Les conditions aux limites appropriées sont :

$$\eta = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 0.$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \theta_0 \rightarrow 1, \quad \theta_1 \rightarrow 0.$$

On a vu que la solution pour  $\theta_0$  est

$$\theta_0 = 1 - \frac{\gamma(\frac{1}{3}, \eta)}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

La solution générale de l'équation en  $\theta_1$  est

$$\theta_1 = \alpha\eta^{\frac{1}{3}}\gamma(-\frac{1}{3}, \eta) + \beta\eta^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{\gamma(\frac{1}{3}, \eta)}{\Gamma(\frac{1}{3})},$$

$\alpha, \beta$  étant deux constantes d'intégration. Comme  $\gamma(-\frac{1}{3}, \eta) \rightarrow \infty$  quand  $\eta \rightarrow 0$ , on doit avoir

$\alpha = 0$  pour satisfaire à la condition à  $\eta = 0$  et la condition à  $\eta \rightarrow \infty$  donne  $\beta = \frac{3}{2}$ .

On a donc :

$$\theta_1 = \frac{3}{2}\eta^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{\gamma(\frac{1}{3}, \eta)}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right) = \frac{3}{2}\eta^{\frac{1}{3}}\theta_0(\eta)$$

et la solution cherchée est

$$\theta = \theta_0 + \frac{v_p^+}{3}(9Pr^2x^+)^{\frac{1}{3}}\theta_1 = \left( 1 + \frac{v_p^+\xi}{2} \right)\theta_0(\eta)$$

au second ordre en  $v_p^+$  près.

**Abstract**—The mean energy equation of the homogeneous, incompressible turbulent boundary layer with blowing is numerically integrated and the Spalding number computed with the following assumptions: constant laminar and turbulent Prandtl numbers; constant rate of blowing or suction; step wall temperature distribution; and a unified law of the wall.

The numerical results are compared with some measurements of velocity and temperature profiles in the boundary layer.

**Zusammenfassung**—Die Gleichung der mittleren Energie für die homogene, inkompressible turbulente Grenzschicht mit Ausblasung wird numerisch integriert und die Spalding-Zahl wird unter den folgenden Voraussetzungen berechnet: konstante laminare und turbulente Prandtl-Zahlen; konstante Ausblasung durch Absaugung; stufenförmige Wandtemperaturverteilung und ein vereinheitlichtes Wandgesetz.

Die numerischen Ergebnisse werden verglichen mit Messungen der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile in der Grenzschicht.

**Аннотация**—Проведено численное интегрирование уравнения средней энергии однородного несжимаемого турбулентного пограничного слоя со вдувом, и рассчитано число Спальдинга при следующих допущениях: постоянные ламинарные и турбулентные числа Прандтля; постоянная скорость вдува или отсоса; ступенчатое распределение температуры обтекаемой стенки; унифицированный закон стенки.

Численные результаты сравнивались с другими измерениями профилей скорости и температуры в пограничном слое.